Preguntas para la 3era fecha de Diciembre 2021 del final de Probabilidades y Estadística (Computación)

Nicolas Saintier

Probabilidad. Definición y enunciados

1. Dar la definición de una medida de probabilidad P. Demuestre a partir de la definición que $P(A^c) = 1 - P(A)$ y que si $B \subset A$ entonces $P(A \setminus B) = P(A) - P(B)$.
2. Dar la definición de una medida de probabilidad P. Demuestre a partir de la definición que $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

Probabilidad condicional e independencia

3. En una muestra de 100 personas hay 13 enfermos no vacunados, 2 enfermos vacunados, 75 sanos vacunados, 10 sanos no vacunados. Elegimos una persona al azar y vemos que está enfermo. ¿ Cual es la probabilidad que no se haya vacunado?
4. Demuestre la regla de multiplicación de las probabilidades condicionales:
$$P(A_1 \cap \cdots \cap A_n) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1 \cap A_2) \ldots P(A_n|A_1 \cap \cdots \cap A_{n-1}).$$
5. Una urna tiene 4 bolas negras y 3 rojas. Sacamos tres bolas sin reposición. ¿Cual es la probabilidad que la primera bola salga negra y la tercera salga roja?
6. Enuncie y demuestre la fórmula de la probabilidad total y el Teorema de Bayes.

Variables aleatorias

7. Demuestre que $X \sim \text{Normal}(\mu, \sigma^2)$ si y solo si $\frac{X-\mu}{\sigma} \sim \text{Normal}(0, 1)$.
8. Enunciar y demuestrar la propiedad de falta de memoria de la disribución exponencial.
9. Sea U una variable uniforme en $[0, 1]$. Para $u \in [0, 1]$ defina $h(u) = \text{máx}\{u, 1-u\}$. Calcule la función de densidad de $X = h(U)$, su distribución acumulada, esperanza y varianza.

Vectores Aleatorios

10. Consideramos variables continuas X, Y no-negativas tales que $P(X \geq x, Y \geq y) = Ce^{-\lambda(x+y)}$ para $x, y \geq 0$. Calcule C, la distribución conjunta de (X, Y), las marginales de X e Y, y verificar que X e Y son independientes.
11. Sean X, Y independientes con distribución $N(0, 1)$. Calcule la distribución de $R := \sqrt{X^2 + Y^2}$.
12. Alicia y José acordaron encontrarse a las 8 de la noche para ir al cine. Como no son puntuales, se puede suponer que los tiempos X e Y en que cada uno de ellos llega son variables aleatorias con distribución uniforme entre las 8 y las 9. Además se supondrá que estos tiempos son independientes. Si ambos están dispuestos a esperar no más de 10 minutos al otro a partir del instante en que llegan, ¿cuál es la probabilidad de que se desencuentren?

13. En un día una gallina pone N huevos donde $N \sim Poisson(\lambda)$. Independientemente de la cantidad de huevos puestos, de un huevo cualquiera nace un pollito con probabilidad p. Hallar la distribución de la cantidad de pollitos nacidos.

Esperanza

14. Calcule la esperanza de una variable de Poisson de parámetro λ.

15. Calcule la esperanza de una variable Binomial de parámetros n y p.

16. De un ejemplo de variables (continuas o discretas) no independientes con covarianza 0.

17. Sea el vector aleatorias (X, Y) con distribución

$$P(X = x, Y = y) = \begin{cases} 1/10 & , x = 1, 2, 3, 4, \ \ y = 1, 2, 3, 4 \text{ e } \ y \leq x \\ 0 & , \text{caso contrario} \end{cases}$$

Calcular el coeficiente de correlación $\rho(X, Y)$ entre X e Y y decidir si X e Y son o no independientes.

Esperanza condicional

18. Se lanza un dado un equilibrado. Notamos X el número obtenido e $Y = 1$ si el número es par, $Y = 0$ sino. Calcule $E(X|Y = 1)$ y $E(Y|X \leq 4)$.

19. Sea (X, Y) un vector aleatorio con función de densidad

$$f_{(X,Y)}(x, y) = \lambda^2 e^{-\lambda y} 1_{\{0<x<y\}}.$$

Qué distribución tiene $X|_{Y=y}$, para $y > 0$?

20. Sea $N \sim$ Poisson(λ) y $X_i \sim$Bernoulli(p), $i \geq 1$, variables aleatorias independientes. Calcule $E\big(\sum_{i=1}^{N} X_i\big)$.

Generación de variables aleatorias

21. Sea F la función de distribución acumulada de una distribución de probabilidad f. Supongamos para simplificar que F es una biyección de $\mathbb{R}$ en $(0, 1)$. Demuestre que si $U \sim$ Uniforme$[0, 1]$, entonces $Y := F^{-1}(U)$ tiene distribución f.

22. Sea $U \sim$ Uniforme$[0, 1]$. Demuestre que $\frac{-\log(1-U)}{\lambda} \sim$ Exponencial(λ).

23. Sean $p_1 < p_2$. Construya un vector (X_1, X_2) tal que $X_i \sim$ Bernoulli(p_i), $i = 1, 2$, y $P(X_1 \leq X_2) = 1$.

Función característica ϕ_X de una va X.

24. Sea $X_1, X_2, ...$ va i.i.d distribución exponencial $Exp(\lambda)$, y N una variable aleatoria geométrica independiente de los X_i. Calcular la función característica de $Z := \sum_{i=1}^{N} X_i$ y deducir la distribución de Z.

Convergencia de variables aleatorias

25. Sea S_n una variable aleatoria Binomial$(n, \lambda/n)$. Hallar $\lim_{n\to+\infty} P(S_n = k)$ para todo entero k.

26. Sea $U_n \sim$ Uniforme$\{\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots, \frac{n}{n}\}$. Calcule el límite en distribución de U_n cuando $n \to \infty$.

27. Enunciar y demostrar las desigualdades de Markov y Tchebyshev.

28. Enuncie y demuestre la Ley de los Grandes Números para variables aleatorias con segundo momento finito (admitiendo Tchebyshev).

29. Sea X_n una variable Poisson(λn). Demuestre que X_n/n converge en probabilidad a λ.

30. Sean $X_1, X_2 \ldots$ v.a. i.i.d. con función de distribución exponencial de parámetro λ y sean $Y_1, Y_2 \ldots$ v.a. i.i.d. e independientes de las X_i con distribución uniforme en $(0, 1)$. Considerar las variables

$$Z_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} 1_{\{X_i \leq 1\}} 1_{\{Y_i \leq 0{,}5\}}.$$

    Hallar la esperanza y la varianza de Z_n, y el valor del límite en probabilidad de Z_n.

31. Sean $X_1, \ldots, X_n$ variables aleatorias i.i.d. uniformes en $[0, 1]$. Consideramos las variables

$$Y_n = \min(X_1, \ldots, X_n), \quad Z_n = \max(X_1, \ldots, X_n), \quad U_n = nY_n \qquad V_n = n(1 - Z_n).$$

    Probar que: U_n y V_n convergen en distribución a una variable exponencial de parámetro 1.

32. Enuncie el Teorema Central del Límite. Sea $(S_n)_{n\geq 1}$ una sucesión de variables aleatorias tales que $S_n \sim$ Binomial(n, p) con $p = 0{,}3$. Indique el valor del siguiente límite:

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\frac{S_n - 0{,}3n}{\sqrt{0{,}3(1 - 0{,}3)n}} \leq 1{,}64 \right) = \ldots\ .$$

33. Enuncie el Teorema Central del Límite. Sean Y_n con distribución $Poisson(\lambda n)$. Demuestre que $\frac{Y_n - n\lambda}{\sqrt{n\lambda}}$ converge en distribución a una variable $N(0, 1)$ cuando $n \to +\infty$.

Procesos de Poisson

34. Los clientes llegan a un banco de acuerdo a un proceso de Poisson de parámetro 3 por minuto, cual es la probabilidad que los tres primeros clientes lleguen antes de los 3 primeros minutos?

35. Consideramos un proceso de Poisson de tasa λ. Calcule la probabilidad que ocurran simultaneamente los eventos $A = \{$hay 3 llegadas en el intervalo $[0, 3]\}$ y $B = \{$hay 4 llegadas en el intervalo $(3, 4]\}$.

Estimadores

36. Hallar el estimador de momentos de θ para la distribución Uniforme$[-\theta, \theta]$.

37. Hallar el estimador de máxima verosimilitud de p para la variable $X \sim$ Bernoulli(p).

38. Hallar el estimador de máximo verosimilitud del párametro a de la distribución

$$f(x) = \begin{cases} ax^{-(a+1)} & \text{si } x \geq 1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

donde $a > 1$. ¿Es consistente ?

39. Hallar el estimador de máximo verosimilitud del párametro θ de la distribución

$$f(x) = \begin{cases} 2\theta\ x\ e^{-\theta x^2} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Es consistente ?

40. Sea $X_1, \ldots, X_n$ una muestra de la distribución

$$f(x;\theta) = e^{-(x-\theta)} 1_{\{x \geq \theta\}}.$$

Hallar el estimador de máxima verosimiltud de θ. Es consistente?

41. Defina el error cuadrático medio (ECM) de un estimador y demuestre que es la suma de la varianza mas el cuadrado del sesgo.

42. Decir si los estimadores de momentos y de máxima verosimilitud de θ para $X \sim$ Uniforme$[0, \theta]$ son insesgados y/o asintoticamente insesgados.

Intervalos de confianza

43. Enuncie el Teorema Central de Límite y justifique la aproximación de la distribución Binomial por la distribución normal. Sean $X_1, ..., X_n$ v.a. i.i.d. con distribución Bernoulli de parámetro p. Halle un intervalo de confianza de nivel aproximado $1 - \alpha$ para p.

44. Sean $X_1, ..., X_n$ v.a. i.i.d. con distribución Exponencial de parámetro λ. Halle un intervalo de confianza de nivel exactamente $1 - \alpha$ para el parámetro λ. Sug: se podrá usar (después de probarlo) que si $X \sim Exp(\lambda)$ entnces $2\lambda \sim Exp(\frac{1}{2})$ por lo que $2\lambda \sum_{i=1}^{n} X_i \sim \Gamma(n, \frac{1}{2}) = \chi^2_{2n}$.

45. Construya un intervalo de confianza de nivel $1 - \alpha$ para la media de la distribución normal $N(\mu, \sigma^2)$ con varianza conocida. Y si no se conoce la varianza ?

46. Construya un intervalo de confianza de nivel $1 - \alpha$ para la varianza de la distribución normal $N(\mu, \sigma^2)$ con experanza conocida. Y si no se conoce la esperanza ?

Test de hipótesis

47. Sea $X \sim \text{Normal}(\mu, \sigma^2)$ con $\sigma^2 = 9$ conocida. Se quiere testear la hipótesis $H_0 : \mu = 30$ contra $H_a : \mu > 30$. Se toma una muestra de tamaño 16 obteniendo un promedio muestral $\bar{x} = 31$. Calcule el P-valor y decida si se rechaza el test a nivel 0,01. Calcule el error de tipo 2 a nivel 0,01 si el valor verdadero de μ es $\mu = 32$.

48. Se toman 25 mediciones de la temperatura en cierto sector de un reactor obteniéndose un promedio muestral $\bar{x} = 249^oC$ y un desvío muestral $s = 2{,}8^oC$. A nivel $\alpha = 0{,}05$ decida si (a) la temperatura media en ese sector del reactor es menor que 250^oC y (b) la varianza de la temperatura en ese sector del reactor es mayor que $(2^oC)^2$. Suponga los datos normales.

49. Un sujeto acierta el color (rojo o negro) de 850 de 1600 cartas puestas al dorso. Queremos decidir si creemos que es adivino. Defina el test, el estadístico utilizado y calcule el P-valor para este test. Que decisión toma a nivel 1 % ? Y a nivel 0,5 % ?

50. Una de las leyes de Murphy más conocidas establece que si se deja caer una tostada untada con dulce, siempre cae del lado untado. Para testear la Ley de Murphy se lanzan $n = 100$ tostadas al aire y se observa que 56 de ellas caen con el dulce para el piso. Considera usted que a nivel 0,05 hay evidencias en favor de la Ley de Murphy?